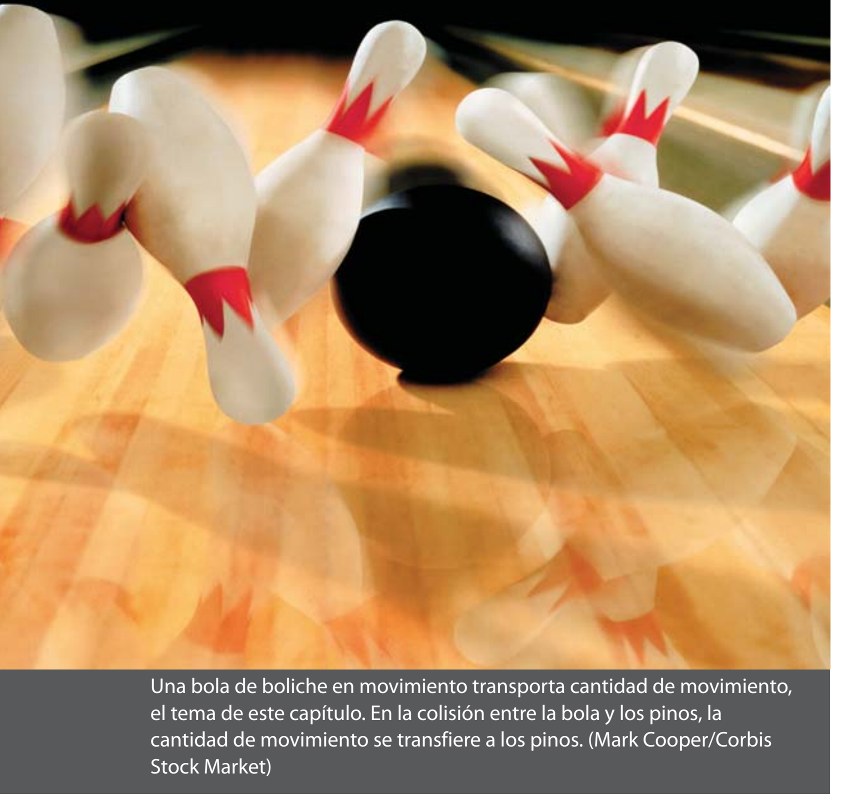


Una bola de boliche en movimiento transporta cantidad de movimiento, el tema de este capítulo. En la colisión entre la bola y los pinos, la cantidad de movimiento se transfiere a los pinos. (Mark Cooper/Corbis Stock Market)

9 Cantidad de movimiento lineal y colisiones

Considere lo que ocurre cuando una bola de boliche golpea un pino, como en la fotografía de arriba. Al pino se le da una gran velocidad como resultado de la colisión; en consecuencia, se aleja volando y golpea a otros pinos o se proyecta hacia el tope de retención y que la fuerza promedio que se ejerce sobre el pino durante la colisión es grande (lo que resulta en una gran aceleración), el pino logra su gran velocidad muy pronto y experimenta la fuerza durante un intervalo de tiempo muy corto.

Aunque la fuerza y la aceleración son grandes para el pino, varían en el tiempo, ¡lo que hace una situación complicada! Uno de los objetivos principales de este capítulo es permitirle entender y analizar tales eventos en una forma simple. Primero, se introduce el concepto de *cantidad de movimiento*, que es útil para describir objetos en movimiento. La cantidad de movimiento de un objeto se relaciona tanto con su masa como con su velocidad. El concepto de cantidad de movimiento conduce a una segunda ley de conservación para un sistema aislado, el de conservación de la cantidad de movimiento. Esta ley es de especial utilidad para tratar problemas que incluyen colisiones entre objetos y para analizar propulsión de cohetes. Además se introduce el concepto de centro de masa de un sistema de partículas: el movimiento de un sistema de partículas se puede describir mediante el movimiento de una partícula representativa ubicada en el centro de masa.

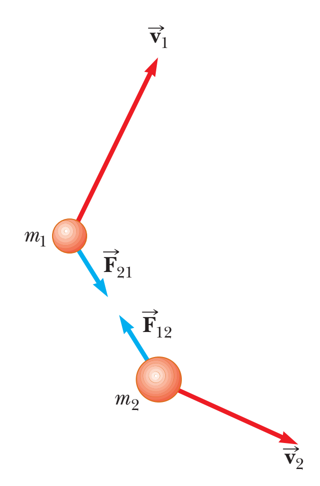


Figura 9.1 Dos partículas interactúan mutuamente. De acuerdo con la tercera ley de Newton, se debe tener $\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$.

9.1 Cantidad de movimiento lineal y su conservación

En el capítulo 8 se estudiaron situaciones que son difíciles de analizar con las leyes de Newton. Fue posible resolver problemas que involucran estas situaciones al identificar un sistema y aplicar un principio de conservación, el de conservación de energía. Examine otra situación en la que un arquero de 60 kg está de pie sobre hielo sin fricción y dispara una flecha de 0.50 kg horizontalmente a 50 m/s. A partir de la tercera ley de Newton, se sabe que la fuerza que el arco ejerce en la flecha se iguala mediante una fuerza en la dirección opuesta sobre el arco (y el arquero). Esta fuerza hace que el arquero se deslice hacia atrás sobre el hielo, ¿pero con qué rapidez? No se puede responder esta pregunta directamente con el uso de la segunda ley de Newton o un planteamiento de energía porque no se tiene suficiente información.

A pesar de la incapacidad para resolver el problema del arquero mediante las técnicas aprendidas hasta el momento, este problema es muy simple de resolver si se introduce una nueva cantidad que describa el movimiento, la *cantidad de movimiento lineal*. Aplique la estrategia general para resolver problemas y elabore su marco conceptual de un sistema aislado de dos partículas (figura 9.1) con las masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades $\vec{\mathbf{v}}_1$ y $\vec{\mathbf{v}}_2$ en un instante de tiempo. Ya que el sistema está aislado, la única fuerza sobre una partícula es a causa de la otra partícula, y se puede clasificar esta situación como una en la que las leyes de Newton son útiles. Si una fuerza a causa de la partícula 1 (por ejemplo, una fuerza gravitacional) actúa sobre la partícula 2, debe haber una segunda fuerza, igual en magnitud pero opuesta en dirección, que la partícula 2 ejerce sobre la partícula 1. Es decir, las fuerzas en las partículas forman un par acción–reacción de la tercera ley de Newton, y $\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$. Esta condición se expresa como

$$\vec{\mathbf{F}}_{21} + \vec{\mathbf{F}}_{12} = 0$$

Más adelante *analice* esta situación al incorporar la segunda ley de Newton. En algún intervalo de tiempo, las partículas en acción recíproca en el sistema aceleran en respuesta a la fuerza. Por lo tanto, al sustituir la fuerza sobre cada partícula con $m\vec{\mathbf{a}}$ para la partícula se obtiene

$$m_1\vec{\mathbf{a}}_1 + m_2\vec{\mathbf{a}}_2 = 0$$

Ahora se sustituye cada aceleración con su definición de la ecuación 4.5:

$$m_1 \frac{d\vec{\mathbf{v}}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{\mathbf{v}}_2}{dt} = 0$$

Si las masas m_1 y m_2 son constantes, se les puede colocar adentro de la operación de derivada, que produce

$$\frac{d(m_1\vec{\mathbf{v}}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{\mathbf{v}}_2)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2) = 0 \qquad \textbf{(9.1)}$$

Para *finalizar* esta discusión, note que la derivada de la suma $m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2$ respecto del tiempo es cero. En consecuencia, esta suma debe ser constante. A partir de esta discusión se aprendió que la cantidad $m\vec{\mathbf{v}}$ para una partícula es importante en que la suma de estas cantidades para un sistema de partículas aislado se conserva. A esta cantidad se le llama *cantidad de movimiento lineal*:

Definición de cantidad de movimiento lineal de una partícula ▶

La **cantidad de movimiento lineal** de una partícula o un objeto que se modela como una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ se define como el producto de la masa y la velocidad de la partícula:

$$\vec{\mathbf{p}} \equiv m\vec{\mathbf{v}} \qquad \textbf{(9.2)}$$

La cantidad de movimiento lineal es una cantidad vectorial porque es igual al producto de una cantidad escalar m y una cantidad vectorial $\vec{\mathbf{v}}$. Su dirección es a lo largo de $\vec{\mathbf{v}}$, tiene dimensiones ML/T y su unidad del SI es kg · m/s.

Si una partícula es móvil en una dirección arbitraria, $\vec{\mathbf{p}}$ tiene tres componentes y la ecuación 9.2 es equivalente a las ecuaciones por componentes

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z$$

Como se obseva a partir de su definición, el concepto de *momentum*[1] proporciona una distinción cuantitativa entre partículas pesadas y ligeras que se mueven a la misma velocidad. Por ejemplo, el *momentum* de una bola de boliche es mucho mayor que la de una bola de tenis que se mueve con la misma rapidez. Newton llamó al producto $m\vec{\mathbf{v}}$ *cantidad de movimiento*; tal vez hoy en día este término es una descripción más gráfica que la palabra *momentum*, que viene del latín y significa movimiento.

Al usar la segunda ley de movimiento de Newton, se puede relacionar la cantidad de movimiento lineal de una partícula con la fuerza resultante que actúa en la partícula. Se inicia con la segunda ley de Newton y sustituye la definición de aceleración:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$$

En la segunda ley de Newton, la masa m se supone constante. Debido a eso, se puede llevar m dentro de la operación derivada para producir

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{d(m\vec{\mathbf{v}})}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \qquad \textbf{(9.3)}$$

◀ Segunda ley de Newton para una partícula

Esta ecuación muestra que **la relación de cambio con el tiempo de la cantidad de movimiento lineal de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre la partícula**.

Esta forma alternativa de la segunda ley de Newton es la forma en que Newton presentó la ley, y de hecho es más general que la forma que se introdujo en el capítulo 5. Además de las situaciones en las que el vector velocidad varía con el tiempo, se puede usar la ecuación 9.3 para estudiar fenómenos en los que la masa cambia. Por ejemplo, la masa de un cohete cambia conforme el combustible se quema y es expulsado del cohete. No se puede usar $\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ para analizar la propulsión de cohetes; se debe aplicar la ecuación 9.3, como se mostrará en la sección 9.8.

Pregunta rápida 9.1 Dos objetos tienen iguales energías cinéticas. ¿De qué modo se comparan las magnitudes de sus cantidades de movimiento? a) $p_1 < p_2$, b) $p_1 = p_2$, c) $p_1 > p_2$, d) no hay suficiente información para informar.

Pregunta rápida 9.2 Su profesor de educación física le lanza una pelota de beisbol con cierta rapidez y usted la atrapa. A continuación el profesor le lanza una pelota grande y pesada usada para gimnasia cuya masa es diez veces la masa de la pelota de beisbol. Usted tiene las siguientes opciones: la pelota grande y pesada se le puede lanzar con a) la misma rapidez que la pelota de beisbol, b) la misma cantidad de movimiento o c) la misma energía cinética. Clasifique estas opciones de la más fácil a la más difícil de atrapar.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 9.1

La cantidad de movimiento de un *sistema* aislado se conserva

Aunque la cantidad de movimiento de un *sistema* aislado se conserva, la cantidad de movimiento de una partícula dentro de un sistema aislado no necesariamente se conserva porque es posible que otras partículas en el sistema interactúen con ella. Siempre aplique la conservación de cantidad de movimiento a un *sistema* aislado.

Al usar la definición de cantidad de movimiento, la ecuación 9.1 se puede reescribir

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2) = 0$$

Ya que la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento total $\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2$ es *cero*, se concluye que la cantidad de movimiento *total* del sistema aislado de las dos partículas en la figura 9.1 debe permanecer constante:

$$\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \text{constante} \qquad \textbf{(9.4)}$$

o, de manera equivalente,

$$\vec{\mathbf{p}}_{1i} + \vec{\mathbf{p}}_{2i} = \vec{\mathbf{p}}_{1f} + \vec{\mathbf{p}}_{2f} \qquad \textbf{(9.5)}$$

[1] En este capítulo, los términos *cantidad de movimiento* y *cantidad de movimiento lineal* tienen el mismo significado. Más adelante, en el capítulo 11, se usará el término *cantidad de movimiento angular* para una cantidad diferente cuando se trate con movimiento rotacional.

donde $\vec{\mathbf{p}}_1$ y $\vec{\mathbf{p}}_{2i}$ son los valores iniciales y $\vec{\mathbf{p}}_{1f}$ y $\vec{\mathbf{p}}_{2f}$ son los valores finales de las cantidades de movimiento para las dos partículas en el intervalo de tiempo durante el que las partículas se afectan entre sí. La ecuación 9.5 en forma de componentes demuestra que las cantidades de movimiento totales en las direcciones x, y y z se conservan todas de manera independiente:

$$p_{1ix} + p_{2ix} = p_{1fx} + p_{2fx} \qquad p_{1iy} + p_{2iy} = p_{1fy} + p_{2fy} \qquad p_{1iz} + p_{2iz} = p_{1fz} + p_{2fz} \tag{9.6}$$

Este resultado, conocido como la **ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal**, se puede extender a cualquier número de partículas en un sistema aislado. Se considera una de las leyes más importantes de la mecánica. Se le puede establecer del modo siguiente:

Conservación de la cantidad de movimiento ►

Siempre que interactúan dos o más partículas en un sistema aislado, la cantidad de movimiento total del sistema permanece constante.

Esta ley dice que **la cantidad de movimiento total de un sistema aislado en todo momento es igual que su cantidad de movimiento inicial**. La ley es la representación matemática de la versión en cantidad de movimiento del **modelo de sistema aislado**. La versión energética del modelo de sistema aislado se estudió en el capítulo 8.

Note que no se hizo afirmación alguna en cuanto al tipo de fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema. Además, no se especificó si las fuerzas son conservativas o no conservativas. El único requisito es que las fuerzas deben ser *internas* al sistema.

EJEMPLO 9.1 El arquero

Considere la situación propuesta al principio de esta sección. Un arquero de 60 kg está de pie en reposo sobre hielo sin fricción y dispara una flecha de 0.50 kg horizontalmente a 50 m/s (figura 9.2). ¿Con qué velocidad el arquero se mueve sobre el hielo después de disparar la flecha?



Figura 9.2 (Ejemplo 9.1) Un arquero dispara una flecha horizontalmente hacia la derecha. Ya que él está de pie sobre hielo sin fricción, comenzará a deslizarse hacia la izquierda a través del hielo.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Es posible que usted ya haya pensado en este problema cuando se introdujo al principio de la sección. Imagine que la flecha se dispara de una forma y el arquero retrocede en la dirección opuesta.

Categorizar *No se puede* resolver este problema al representar la flecha como una partícula bajo una fuerza neta, porque no se tiene información acerca de la fuerza en la flecha o su aceleración. *No se puede* resolver este problema al usar un modelo de sistema y aplicar un enfoque energético porque no se sabe cuánto trabajo se invierte al jalar el arco hacia atrás o cuánta energía potencial se almacena en el arco. No obstante, este problema *se puede* resolver muy fácilmente con un planteamiento que suponga cantidad de movimiento.

Considere el sistema que está constituido del arquero (incluido el arco) y la flecha. El sistema no está aislado porque la fuerza gravitacional y la fuerza normal del hielo actúan sobre el sistema. Sin embargo, dichas fuerzas son verticales y perpendiculares al movimiento del sistema. Por lo tanto, no hay fuerzas externas en la dirección horizontal y se puede considerar un sistema aislado en términos de componentes de la cantidad de movimiento en esta dirección.

Analizar La cantidad de movimiento horizontal total del sistema antes de disparar la flecha es cero, porque nada en el sistema se mueve. Debido a esto, la cantidad de movimiento horizontal total del sistema después de disparar la flecha también debe ser cero. Se elige la dirección de disparo de la flecha como la dirección x positiva. Al identificar al arquero como la partícula 1 y la flecha como la partícula 2, se tiene $m_1 = 60$ kg, $m_2 = 0.50$ kg y $\vec{\mathbf{v}}_{2f} = 50\hat{\mathbf{i}}$ m/s.

Ajustar la cantidad de movimiento final del sistema igual a cero: $m_1\vec{\mathbf{v}}_{1f} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2f} = 0$

Sustituya los números de orden de magnitud para las masas:

$$\frac{K_E}{K_b} = \frac{m_b}{m_E} \sim \frac{1 \text{ kg}}{10^{24} \text{ kg}} \sim 10^{-24}$$

Finalizar La energía cinética de la Tierra es una fracción muy pequeña de la energía cinética de la bola, así que es justificado ignorar la energía cinética del sistema.

9.2 Impulso y cantidad de movimiento



Las bolsas de aire en los automóviles han salvado incontables vidas en los accidentes. La bolsa de aire aumenta el intervalo de tiempo durante el cual el pasajero es llevado al reposo, con lo cual disminuye la fuerza (y las lesiones resultantes) en el pasajero.

De acuerdo con la ecuación 9.3, la cantidad de movimiento de una partícula cambia si una fuerza neta actúa en la partícula. Conocer el cambio en la cantidad de movimiento causada por una fuerza es útil al resolver algunos tipos de problemas. Para construir una mejor comprensión de este concepto importante, suponga que una fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ actúa en una partícula y que esta fuerza puede variar con el tiempo. De acuerdo con la segunda ley de Newton, $\sum \vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$, o

$$d\vec{\mathbf{p}} = \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \quad \textbf{(9.7)}$$

Se puede integrar[2] esta ecuación para encontrar el cambio en la cantidad de movimiento de una partícula cuando la fuerza actúa durante algún intervalo de tiempo. Si la cantidad de movimiento de la partícula cambia de $\vec{\mathbf{p}}_i$ en el tiempo t_i a $\vec{\mathbf{p}}_f$ en el tiempo t_f, integrar la ecuación 9.7 produce

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \quad \textbf{(9.8)}$$

Para evaluar la integral, es necesario saber cómo varía con el tiempo la fuerza neta. La cantidad en el lado derecho de esta ecuación es un vector llamado **impulso** de la fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ que actúa en una partícula durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$:

Impulso de una fuerza ►

$$\vec{\mathbf{I}} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \quad \textbf{(9.9)}$$

A partir de esta definición, se ve que el impulso $\vec{\mathbf{I}}$ es una cantidad vectorial que tiene una magnitud igual al área bajo la curva fuerza–tiempo, como se describe en la figura 9.3a. Se supone que la fuerza varía en el tiempo en la forma integral que se muestra en la figura y es distinta de cero en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$. La dirección del vector impulso es la misma que la dirección del cambio en la cantidad de movimiento. El impulso tiene las dimensiones de cantidad de movimiento, esto es, ML/T. El impulso *no* es una propiedad de una partícula; en vez de ello, es una medida del grado en el que la fuerza externa cambia la cantidad de movimiento de la partícula.

La ecuación 9.8 es un enunciado importante conocido como **teorema impulso–cantidad de movimiento**:

Teorema impulso–cantidad de movimiento ►

El cambio en la cantidad de movimiento de una partícula es igual al impulso de la fuerza neta que actúa en la partícula:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{I}} \quad \textbf{(9.10)}$$

Este enunciado es equivalente a la segunda ley de Newton. Cuando se dice que a una partícula se le da un impulso, significa que la cantidad de movimiento se transfiere de un agente externo a dicha partícula. La ecuación 9.10 es idéntica en forma a la ecuación de conservación de la energía, la ecuación 8.1. El lado izquierdo de la ecuación 9.10 representa el cambio en la cantidad de movimiento del sistema, que en este caso es una sola partícula. El lado derecho es una medida de cuánta cantidad de movimiento cruza la frontera del sistema debido a la fuerza neta que se aplica al sistema.

Ya que la fuerza neta que imparte un impulso a una partícula por lo general puede variar en el tiempo, es conveniente definir una fuerza neta promediada en el tiempo:

[2] Aquí se integra la fuerza en relación con el tiempo. Compare esta estrategia con los esfuerzos del capítulo 7, donde se integró fuerza en relación con la posición para encontrar el trabajo invertido por la fuerza.

$$\left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right)_{\text{prom}} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \qquad \textbf{(9.11)}$$

donde $\Delta t = t_f - t_i$. (Esta ecuación es una aplicación del teorema del valor medio del cálculo.) Debido a eso, la ecuación 9.9 se puede expresar como

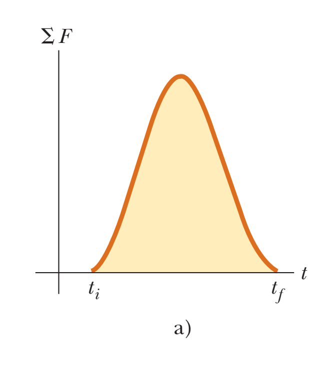
$$\vec{\mathbf{I}} = \left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right)_{\text{prom}} \Delta t \qquad \textbf{(9.12)}$$

Esta fuerza promediada en el tiempo, que se muestra en la figura 9.3b, se interpreta como la fuerza constante que daría a la partícula, en el intervalo de tiempo Δt, el mismo impulso que la fuerza variable en el tiempo da durante este mismo intervalo.

En principio, si $\sum \vec{\mathbf{F}}$ se conoce como una función del tiempo, el impulso se calcula a partir de la ecuación 9.9. El cálculo se vuelve especialmente simple si la fuerza que actúa sobre la partícula es constante. En este caso $(\sum \vec{\mathbf{F}})_{\text{prom}} = \sum \vec{\mathbf{F}}$, donde $\sum \vec{\mathbf{F}}$ es la fuerza neta constante, y la ecuación 9.12 se convierte en

$$\vec{\mathbf{I}} = \sum \vec{\mathbf{F}}\, \Delta t \qquad \textbf{(9.13)}$$

En muchas situaciones físicas se usará lo que se llama la **aproximación del impulso, en la que se supone que una de las fuerzas ejercida sobre una partícula actúa durante un tiempo breve pero es mucho mayor que cualquiera otra fuerza presente**. En este caso, la fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ en la ecuación 9.9 se sustituye con una sola fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ para encontrar el impulso sobre la partícula. Esta aproximación es especialmente útil al tratar colisiones en las cuales la duración de la colisión es muy breve. Cuando se hace esta aproximación, la fuerza sola se conoce como *fuerza impulsiva*. Por ejemplo, cuando un bat golpea una pelota de beisbol, el tiempo de la colisión es aproximadamente 0.01 s y la fuerza promedio que el bat ejerce sobre la pelota en este tiempo usualmente es de muchos miles de newtons. Ya que esta fuerza de contacto es mucho más grande que la magnitud de la fuerza gravitacional, la aproximación del impulso justifica el ignorar las fuerzas gravitacionales en la pelota y el bat. Cuando se usa esta aproximación, es importante recordar que $\vec{\mathbf{p}}_i$ y $\vec{\mathbf{p}}_f$ representan las cantidades de movimiento *inmediatamente* antes y después de la colisión, respectivamente. Por lo tanto, en cualquier situación en la que es adecuado usar la aproximación del impulso, la partícula se mueve muy poco durante la colisión.



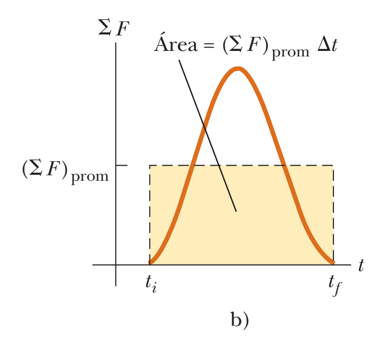


Figura 9.3 a) Una fuerza neta que actúa sobre una partícula puede variar en el tiempo. El impulso impartido a la partícula por la fuerza es el área bajo la curva fuerza con tiempo. b) En el intervalo de tiempo Δt, la fuerza neta promediada en el tiempo (línea discontinua horizontal) da el mismo impulso a una partícula como lo hace la fuerza variable en el tiempo descrita en a).

Pregunta rápida 9.3 Dos objetos están en reposo sobre una superficie sin fricción. El objeto 1 tiene una masa mayor que el objeto 2. **i)** Cuando se aplica una fuerza constante al objeto 1, acelera a través de una distancia d en una línea recta. Se retira la fuerza del objeto 1 y se aplica al objeto 2. En el momento cuando el objeto 2 aceleró a través de la misma distancia d, ¿qué enunciados son verdaderos? a) $p_1 < p_2$, b) $p_1 = p_2$, c) $p_1 > p_2$, d) $K_1 < K_2$, e) $K_1 = K_2$, f) $K_1 > K_2$. **ii)** Cuando se aplica una fuerza al objeto 1, éste acelera durante un intervalo de tiempo Δt. Se retira la fuerza del objeto 1 y se aplica al objeto 2. De la misma lista de opciones, ¿cuáles enunciados son verdaderos después de que el objeto 2 acelera durante el mismo intervalo de tiempo Δt?

Pregunta rápida 9.4 Clasifique el tablero, el cinturón de seguridad y la bolsa de aire de un automóvil en términos de a) el impulso y b) la fuerza promedio que cada uno entrega a un pasajero en el asiento delantero durante una colisión, de mayor a menor.

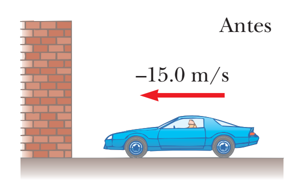
EJEMPLO 9.3 ¿Qué tan útiles son las defensas?

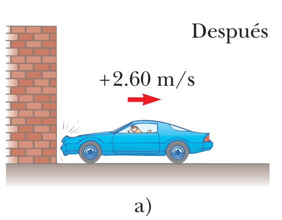
En una prueba de choque, un automóvil de 1 500 kg de masa choca con una pared, como se muestra en la figura 9.4. Las velocidades inicial y final del automóvil son $\vec{\mathbf{v}}_i = -15.0\hat{\mathbf{i}}$ m/s y $\vec{\mathbf{v}}_f = 2.60\hat{\mathbf{i}}$ m/s, respectivamente. Si la colisión dura 0.150 s, encuentre el impulso causado por la colisión y la fuerza promedio ejercida en el automóvil.

SOLUCIÓN

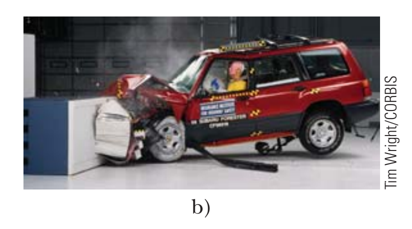
Conceptualizar El tiempo de colisión es breve, así que se puede formar una idea de que el automóvil se lleva al reposo muy rápidamente y en tal caso se mueve de regreso en la dirección opuesta con una rapidez reducida.

Categorizar Se considera que la fuerza ejercida por la pared sobre el automóvil es grande en comparación con otras fuerzas sobre el auto (como la fricción y la resistencia del aire). Además, la fuerza gravitacional y la fuerza normal ejercida por el camino sobre el automóvil son perpendiculares al movimiento y en consecuencia no afectan la cantidad de movimiento horizontal. Por lo tanto, se clasifica el problema como uno en el que se puede aplicar la aproximación del impulso en la dirección horizontal.





a)



b)

Figura 9.4 (Ejemplo 9.3) a) La cantidad de movimiento de este automóvil cambia como resultado de su colisión con la pared. b) En una prueba de choque, mucha de la energía cinética inicial del automóvil se transforma en energía asociada con el daño al auto.

Tim Wright/CORBIS

Analizar

Evalúe las cantidades de movimiento inicial y final del automóvil:

$$\vec{\mathbf{p}}_i = m\vec{\mathbf{v}}_i = (1\,500 \text{ kg})(-15.0\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}) = -2.25 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

$$\vec{\mathbf{p}}_f = m\vec{\mathbf{v}}_f = (1\,500 \text{ kg})(2.60\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}) = 0.39 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Aplique la ecuación 9.10 para hallar el impulso en el automóvil

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = 0.39 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s} - (-2.25 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s})$$

$$= 2.64 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Aplique la ecuación 9.3 para hallar el valor numérico de la fuerza promedio ejercida por la pared en el automóvil:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{prom}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}}{\Delta t} = \frac{2.64 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}{0.150 \text{ s}} = 1.76 \times 10^5 \hat{\mathbf{i}} \text{ N}$$

Finalizar Note que los signos de las velocidades en este ejemplo indican la inversión de direcciones. ¿Cuáles serían las matemáticas descriptivas si las velocidades inicial y final tienen el mismo signo?

¿Qué pasaría si? ¿Y si el automóvil no rebota de la pared? Suponga que la velocidad final del automóvil es cero y que el intervalo de tiempo de la colisión permanece en 0.150 s. ¿Esto representaría una fuerza mayor o menor ejercida por la pared sobre el auto?

Respuesta En la situación original en la que el automóvil rebota, la fuerza por la pared sobre el automóvil hace dos cosas durante el intervalo de tiempo: 1) detiene el auto y 2) hace que el auto se aleje de la pared a 2.60 m/s después de chocar. Si el automóvil no rebota, la fuerza sólo hace el primero de estos pasos (detener el auto), lo que requiere una fuerza *más pequeña*.

En términos matemáticos, en el caso del auto que no rebota, el impulso es

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = 0 - (-2.25 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s}) = 2.25 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

La fuerza promedio que ejerce la pared sobre el automóvil es

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{prom}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}}{\Delta t} = \frac{2.25 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}{0.150 \text{ s}} = 1.50 \times 10^5 \hat{\mathbf{i}} \text{ N}$$

que de hecho es más pequeña que el valor anteriormente calculado, como se argumentó teóricamente.

9.3 Colisiones en una dimensión

En esta sección se usa la ley de conservación de cantidad de movimiento lineal para describir lo que ocurre cuando chocan dos partículas. El término **colisión** representa un evento durante el que dos partículas se acercan una a la otra e interactúan mediante fuerzas. Se supone que las fuerzas de interacción son mucho mayores que otras fuerzas externas cualesquiera, así que se puede usar la aproximación del impulso.

Una colisión puede involucrar contacto físico entre dos objetos macroscópicos, como se describe en la figura 9.5a, pero la noción de lo que significa una colisión se debe ampliar porque “contacto físico” en una escala submicroscópica está mal definido y por lo tanto no

tiene significado. Para comprender este concepto, considere una colisión a escala atómica (figura 9.5b) tal como la colisión de un protón con una partícula alfa (el núcleo de un átomo de helio). Ya que las partículas tienen carga positiva, se repelen mutuamente debido a la fuerza electrostática intensa entre ellas en separaciones cercanas y nunca entran en "contacto físico".

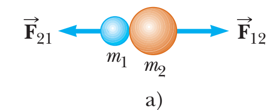
Cuando dos partículas de masas m_1 y m_2 chocan como se muestra en la figura 9.5, las fuerzas impulsivas pueden variar en el tiempo en formas complicadas, tales como las que se muestran en la figura 9.3. Sin embargo, sin importar la complejidad del comportamiento temporal de la fuerza impulsiva, esta fuerza es interna al sistema de dos partículas. En consecuencia, las dos partículas forman un sistema aislado y la cantidad de movimiento del sistema se conserva.

En contraste, la energía cinética total del sistema de partículas puede o no conservarse, dependiendo del tipo de colisión. De hecho, las colisiones se categorizan como *elásticas* o como *inelásticas*, dependiendo de si la energía cinética se conserva o no.

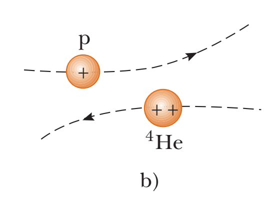
Una **colisión elástica** entre dos objetos es aquella en la que **la energía cinética total (así como la cantidad de movimiento total) del sistema es la misma antes y después de la colisión**. Las colisiones entre ciertos objetos en el mundo macroscópico, como las bolas de billar, sólo son *aproximadamente* elásticas porque tiene lugar alguna deformación y pérdida de energía cinética. Por ejemplo, usted puede escuchar la colisión de una bola de billar, de modo que usted sabe que parte de la energía se transfiere del sistema mediante sonido. ¡Una colisión elástica debe ser perfectamente silenciosa! Las colisiones *verdaderamente* elásticas se presentan entre partículas atómicas y subatómicas.

En una **colisión inelástica la energía cinética total del sistema no es la misma antes ni después de la colisión (aun cuando la cantidad de movimiento del sistema se conserve)**. Las colisiones inelásticas son de dos tipos. Cuando los objetos se unen después de chocar, como cuando un meteorito choca con la Tierra, la colisión se llama **perfectamente inelástica**. Cuando los objetos en colisión no se unen sino que se pierde parte de la energía cinética, como en el caso de una bola de hule que choca con una superficie dura, la colisión se llama **inelástica** (sin adverbio modificador). Cuando la bola de hule choca con la superficie dura, parte de la energía cinética de la bola se pierde cuando la bola se deforma mientras está en contacto con la superficie.

En el resto de esta sección, se tratan las colisiones en una dimensión y se consideran los dos casos extremos, las colisiones perfectamente inelásticas y elásticas.



a)



b)

Figura 9.5 a) Colisión entre dos objetos como resultado de contacto directo. b) "Colisión" entre dos partículas con carga.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 9.2
Colisiones inelásticas

Por lo general, las colisiones inelásticas son difíciles de analizar sin información adicional. La falta de esta información aparece en la representación matemática con más incógnitas que ecuaciones.

Colisiones perfectamente inelásticas

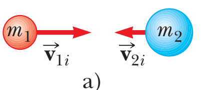
Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades iniciales $\vec{\mathbf{v}}_{1i}$ y $\vec{\mathbf{v}}_{2i}$ a lo largo de la misma línea recta, como se muestra en la figura 9.6. Las dos partículas chocan de frente, quedan unidas y luego se mueven con alguna velocidad común $\vec{\mathbf{v}}_f$ después de la colisión. Ya que la cantidad de movimiento de un sistema aislado se conserva en *cualquier* colisión, se puede decir que la cantidad de movimiento total antes de la colisión es igual a la cantidad de movimiento total del sistema compuesto después de la colisión:

$$m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{\mathbf{v}}_f \tag{9.14}$$

Al resolver para la velocidad final se obtiene

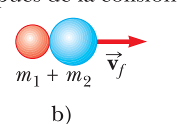
$$\vec{\mathbf{v}}_f = \frac{m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i}}{m_1 + m_2} \tag{9.15}$$

Antes de la colisión



a)

Después de la colisión



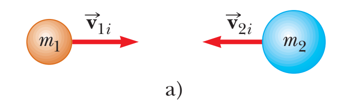
b)

Figura 9.6 Representación esquemática de una colisión frontal perfectamente inelástica entre dos partículas: a) antes y b) después de la colisión.

Colisiones elásticas

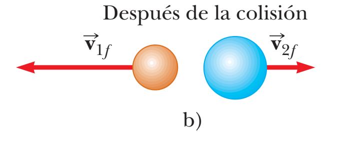
Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades iniciales $\vec{\mathbf{v}}_{1i}$ y $\vec{\mathbf{v}}_{2i}$ a lo largo de la misma línea recta, como se muestra en la figura 9.7. Las dos partículas chocan frontalmente y luego dejan el sitio de colisión con diferentes velocidades $\vec{\mathbf{v}}_{1f}$ y $\vec{\mathbf{v}}_{2f}$. En una colisión elástica, tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética

Antes de la colisión



a)

Después de la colisión



b)

Figura 9.7 Representación esquemática de una colisión frontal elástica entre dos partículas: a) antes y b) después de la colisión.

del sistema se conserva. Por ende, al considerar velocidades a lo largo de la dirección horizontal en la figura 9.7, se tiene

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} \quad \textbf{(9.16)}$$

$$\tfrac{1}{2}m_1{v_{1i}}^2 + \tfrac{1}{2}m_2{v_{2i}}^2 = \tfrac{1}{2}m_1{v_{1f}}^2 + \tfrac{1}{2}m_2{v_{2f}}^2 \quad \textbf{(9.17)}$$

Ya que todas las velocidades en la figura 9.7 son hacia la izquierda o hacia la derecha, se pueden representar mediante las correspondientes magnitudes de velocidad junto con los signos algebraicos que indican dirección. Se indicará v como positivo si una partícula se mueve hacia la derecha y negativo si se mueve hacia la izquierda.

En un problema representativo que incluye colisiones elásticas, existen dos cantidades desconocidas, y las ecuaciones 9.16 y 9.17 se pueden resolver simultáneamente para encontrarlas. Sin embargo, un planteamiento alternativo, uno que involucra un poco de manipulación matemática de la ecuación 9.17, con frecuencia simplifica este proceso. Para ver cómo, cancele el factor $\frac{1}{2}$ en la ecuación 9.17 y rescríbala como

$$m_1({v_{1i}}^2 - {v_{1f}}^2) = m_2({v_{2f}}^2 - {v_{2i}}^2)$$

el factorizar ambos lados de esta ecuación produce

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) \quad \textbf{(9.18)}$$

A continuación, se separa los términos que contengan m_1 y m_2 en la ecuación 9.16 para obtener

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \quad \textbf{(9.19)}$$

Para obtener el resultado final, divida la ecuación 9.18 entre la ecuación 9.19

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \quad \textbf{(9.20)}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 9.3

No es una ecuación general

La ecuación 9.20 sólo se puede usar en una situación muy *específica*, una colisión elástica unidimensional entre dos objetos. El concepto *general* es la conservación de la cantidad de movimiento (y la conservación de la energía cinética, si la colisión es elástica) para un sistema aislado.

Esta ecuación, en combinación con la ecuación 9.16, se usa para resolver problemas que traten con colisiones elásticas. De acuerdo con la ecuación 9.20, la velocidad *relativa* de las dos partículas antes de la colisión, $v_{1i} - v_{2i}$, es igual al negativo de su velocidad relativa después de la colisión, $-(v_{1f} - v_{2f})$.

Suponga que se conocen las masas y velocidades iniciales de ambas partículas. Las ecuaciones 9.16 y 9.20 se pueden resolver para las velocidades finales en términos de las velocidades iniciales porque existen dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i} \quad \textbf{(9.21)}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2i} \quad \textbf{(9.22)}$$

Es importante usar los signos apropiados para v_{1i} y v_{2i} en las ecuaciones 9.21 y 9.22.

Considere algunos casos especiales. Si $m_1 = m_2$, las ecuaciones 9.21 y 9.22 muestran que $v_{1f} = v_{2i}$ y $v_{2f} = v_{1i}$, lo que significa que las partículas intercambian velocidades si tienen masas iguales. Esto es aproximadamente lo que uno observa en las colisiones frontales de las bolas de billar: la bola blanca se detiene y la bola golpeada se aleja de la colisión con la misma velocidad que tenía la bola blanca.

Si la partícula 2 está en reposo al inicio, en tal caso $v_{2i} = 0$, y las ecuaciones 9.21 y 9.22 se convierten en

Colisión elástica: partícula 2 inicialmente en reposo ▶

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} \quad \textbf{(9.23)}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} \quad \textbf{(9.24)}$$

Si m_1 es mucho mayor que m_2 y $v_{2i} = 0$, se ve de las ecuaciones 9.23 y 9.24 que $v_{1f} \approx v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 2v_{1i}$. Esto es, cuando una partícula muy pesada choca frontalmente con una muy

ligera que inicialmente está en reposo, la partícula pesada continúa su movimiento sin alterarse después de la colisión y la partícula ligera rebota con una rapidez igual a casi el doble de la rapidez inicial de la partícula pesada. Un ejemplo de tal colisión es la de un átomo pesado en movimiento, como el uranio, que golpea un átomo ligero, como el hidrógeno.

Si m_2 es mucho mayor que m_1 y la partícula 2 inicialmente está en reposo, en tal caso $v_{1f} \approx -v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 0$. Esto es, cuando una partícula muy ligera choca frontalmente con una partícula muy pesada que inicialmente está en reposo, la partícula ligera invierte su velocidad y la pesada permanece prácticamente en reposo.

Pregunta rápida 9.5 En una colisión unidimensional perfectamente inelástica entre dos objetos en movimiento, ¿qué condición única es necesaria de modo que la energía cinética final del sistema sea cero después de la colisión? a) Los objetos deben tener cantidades de movimiento con la misma magnitud pero direcciones opuestas. b) Los objetos deben tener la misma masa. c) Los objetos deben tener la misma velocidad. d) Los objetos deben tener la misma rapidez, con vectores velocidad en direcciones opuestas.

Pregunta rápida 9.6 Una pelota de ping pong se lanza hacia una bola de boliche fija. La pelota de ping pong hace una colisión elástica unidimensional y rebota de regreso a lo largo de la misma línea. En comparación con la bola de boliche después de la colisión, ¿la pelota de ping pong tiene a) una magnitud mayor de cantidad de movimiento y más energía cinética, b) una magnitud menor de cantidad de movimiento y más energía cinética, c) una magnitud mayor de cantidad de movimiento y menos energía cinética, d) una magnitud menor de cantidad de movimiento y menos energía cinética o e) la misma magnitud de cantidad de movimiento y la misma energía cinética?

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS **Colisiones unidimensionales**

Debe aplicar el planteamiento siguiente cuando resuelva problemas de colisiones en una dimensión:

1. *Conceptualizar.* Piense que la colisión se presenta en su mente. Dibuje diagramas simples de las partículas antes y después de la colisión e incluya vectores velocidad adecuados. Al principio, es posible que deba adivinar las direcciones de los vectores velocidad finales.
2. *Categorizar.* ¿El sistema de partículas es aislado? Si es así, clasifique la colisión como elástica, inelástica o perfectamente inelástica.
3. *Analizar.* Establezca la representación matemática adecuada para el problema. Si la colisión es perfectamente inelástica, use la ecuación 9.15. Si la colisión es elástica, use las ecuaciones 9.16 y 9.20. Si la colisión es inelástica, use la ecuación 9.16. Para encontrar las velocidades finales en este caso, necesitará alguna información adicional.
4. *Finalizar.* Una vez que determine su resultado, compruebe para ver si sus respuestas son congruentes con las representaciones mental y gráfica y que sus resultados son realistas.

EJEMPLO 9.4 **Aliviador de estrés para ejecutivos**

En la figura 9.8 (página 238) se muestra un ingenioso dispositivo que explica la conservación de la cantidad de movimiento y la energía cinética. Consiste de cinco bolas duras idénticas sostenidas por cuerdas de iguales longitudes. Cuando la bola 1 se retira y se libera, después de la colisión casi elástica entre ella y la bola 2, la bola 1 se detiene y la bola 5 se mueve hacia afuera, como se muestra en la figura 9.8b. Si las bolas 1 y 2 se retiran y liberan, se detienen después de la colisión y las bolas 4 y 5 se balancean hacia afuera, y así por el estilo. ¿Alguna vez es posible que, cuando la bola 1 se libere, se detenga después de la colisión y las bolas 4 y 5 se balanceen en el lado opuesto y viajen con la mitad de la rapidez de la bola 1, como en la figura 9.8c?

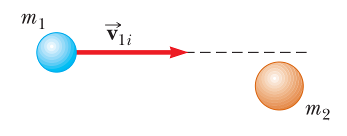
Sustituya los valores conocidos y el resultado del inciso B):

$$\tfrac{1}{2}(1.60 \text{ kg})(4.00 \text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(2.10 \text{ kg})(2.50 \text{ m/s})^2 + 0$$
$$= \tfrac{1}{2}(1.60 \text{ kg})(3.00 \text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(2.10 \text{ kg})(1.74 \text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(600 \text{ N/m})x^2$$

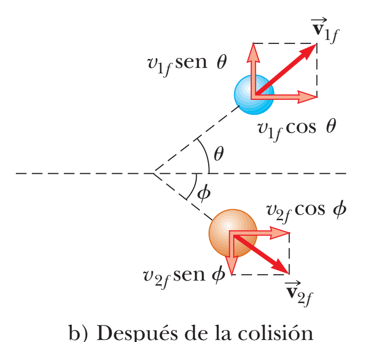
Resuelva para x:

$$x = 0.173 \text{ m}$$

Finalizar Esta respuesta no es la compresión máxima del resorte, porque los dos bloques aún se mueven uno hacia el otro en el instante que se muestra en la figura 9.10b. ¿Se puede determinar la compresión máxima del resorte?



a) Antes de la colisión



b) Después de la colisión

Figura 9.11 Una colisión elástica indirecta entre dos partículas.

9.4 Colisiones en dos dimensiones

En la sección 9.1 se mostró que la cantidad de movimiento de un sistema de dos partículas se conserva cuando el sistema está aislado. Para cualquier colisión de dos partículas, este resultado implica que la cantidad de movimiento en cada una de las direcciones x, y y z se conserva. Un importante subconjunto de colisiones tiene lugar en un plano. El juego de billar es un ejemplo familiar que involucra múltiples colisiones de objetos que se mueven en una superficie en dos dimensiones. Para tales colisiones en dos dimensiones, se obtienen dos ecuaciones componentes para conservación de cantidad de movimiento:

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

donde tres subíndices en las componentes de velocidad en estas ecuaciones representan, respectivamente, la identificación del objeto (1, 2), los valores inicial y final (i, f) y la componente de velocidad (x, y).

Considere un problema específico en dos dimensiones en el que la partícula 1 de masa m_1 choca con la partícula 2 de masa m_2 inicialmente en reposo, como en la figura 9.11. Después de la colisión (figura 9.11b), la partícula 1 se mueve en un ángulo θ respecto a la horizontal y la partícula 2 se mueve en un ángulo ϕ respecto a la horizontal. Este evento se llama colisión *oblicua* al aplicar la ley de conservación de la cantidad de movimiento en forma de componentes y notar que la componente y inicial de la cantidad de movimiento del sistema de dos partículas es cero, se obtiene

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi \tag{9.25}$$

$$0 = m_1 v_{1f} \operatorname{sen}\theta - m_2 v_{2f} \operatorname{sen}\phi \tag{9.26}$$

donde el signo menos en la ecuación 9.26 se incluye porque, después de la colisión, la partícula 2 tiene una componente y de velocidad que es hacia abajo. (Los símbolos v en estas ecuaciones particulares son magnitudes de velocidad, no componentes de velocidad. La dirección del vector componente se indica explícitamente con los signos más o menos.) Ahora se tienen dos ecuaciones independientes. Ya que no más de dos de las siete cantidades en las ecuaciones 9.25 y 9.26 sean incógnitas, se puede resolver este problema.

Si la colisión es elástica, también se puede usar la ecuación 9.17 (conservación de energía cinética) con $v_{2i} = 0$:

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^{\,2} = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^{\,2} + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2f}^{\,2} \tag{9.27}$$

Al conocer la rapidez inicial de la partícula 1 y ambas masas, quedan cuatro incógnitas (v_{1f}, v_{2f}, θ y ϕ). Ya que sólo se tienen tres ecuaciones, se debe proporcionar una de las cuatro cantidades restantes para determinar el movimiento después de la colisión elástica a partir de principios de conservación.

Si la colisión es inelástica, la energía cinética *no* se conserva y la ecuación 9.27 *no* se aplica.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 9.4

No use la ecuación 9.20

La ecuación 9.20, que relaciona las velocidades relativas inicial y final de dos objetos que chocan, sólo es válida para colisiones elásticas unidimensionales. No use esta ecuación cuando analice colisiones en dos dimensiones.

Eleve al cuadrado estas dos ecuaciones y súmelas:

$$v_{2f}^2 \cos^2 \phi + v_{2f}^2 \operatorname{sen}^2 \phi$$
$$= 1.23 \times 10^{11} \text{ m}^2/\text{s}^2 - (7.00 \times 10^5 \text{ m/s})v_{1f} \cos 37.0° + v_{1f}^2 \cos^2 37.0° + v_{1f}^2 \operatorname{sen}^2 37.0°$$

$$4) \quad v_{2f}^2 = 1.23 \times 10^{11} - (5.59 \times 10^5)v_{1f} + v_{1f}^2$$

Sustituya la ecuación 4) en la ecuación 3):

$$v_{1f}^2 + [1.23 \times 10^{11} - (5.59 \times 10^5)v_{1f} + v_{1f}^2] = 1.23 \times 10^{11}$$
$$2v_{1f}^2 - (5.59 \times 10^5)v_{1f} = (2v_{1f} - 5.59 \times 10^5)v_{1f} = 0$$

Una posible solución de esta ecuación es $v_{1f} = 0$, que corresponde a una colisión frontal en la que el primer protón se detiene y el segundo continúa con la misma rapidez en la misma dirección. Esta no es la solución que se quiere.

Iguale a cero el otro factor:

$$2v_{1f} - 5.59 \times 10^5 = 0 \quad \rightarrow \quad v_{1f} = 2.80 \times 10^5 \text{ m/s}$$

Use la ecuación 3) para encontrar v_{2f}:

$$v_{2f} = \sqrt{1.23 \times 10^{11} - v_{1f}^2} = \sqrt{1.23 \times 10^{11} - (2.80 \times 10^5)^2}$$
$$= 2.11 \times 10^5 \text{ m/s}$$

Use la ecuación 2) para encontrar ϕ:

$$\phi = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{v_{1f} \operatorname{sen} 37.0°}{v_{2f}}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{(2.80 \times 10^5) \operatorname{sen} 37.0°}{2.11 \times 10^5}\right) = 53.0°$$

Finalizar Es interesante que $\theta + \phi = 90°$. Este resultado *no* es accidental. Siempre que dos objetos de igual masa choquen elásticamente en una colisión oblicua y uno de ellos inicialmente en reposo, sus velocidades finales son mutuamente perpendiculares.

9.5 El centro de masa

En esta sección se describe el movimiento global de un sistema en términos de un punto especial llamado el **centro de masa** del sistema. El sistema puede ser un grupo de partículas, como un conjunto de átomos en un contenedor, o un objeto extendido, como un gimnasta que salta en el aire. Se verá que el movimiento traslacional del centro de masa del sistema es el mismo, como si toda la masa del sistema estuviese concentrada en dicho punto. Es decir, el sistema se mueve como si la fuerza externa neta se aplicara a una sola partícula ubicada en el centro de masa. Este comportamiento es independiente de otro movimiento, como la rotación o la vibración del sistema. Este modelo, el *modelo de partícula*, se introdujo en el capítulo 2.

Examine un sistema que consiste de un par de partículas que tienen diferentes masas y se conectan mediante una barra rígida ligera (figura 9.13). La posición del centro de masa de un sistema se describe como la *posición promedio* de la masa del sistema. El centro de masa del sistema se ubica en algún lugar en la línea que une las dos partículas y está más cerca de la partícula que tiene la masa más grande. Si se aplica una sola fuerza a un punto en la barra *arriba* del centro de masa, el sistema gira en sentido de las manecillas del reloj (vea la figura 9.13a). Si la fuerza se aplica en un punto en la barra por *abajo* del centro de masa, el sistema gira contra las manecillas del reloj (vea la figura 9.13b). Si la fuerza se aplica al centro de masa, el sistema se mueve en la dirección de la fuerza sin girar (vea la figura 9.13c). El centro de masa de un objeto se ubica con este procedimiento.

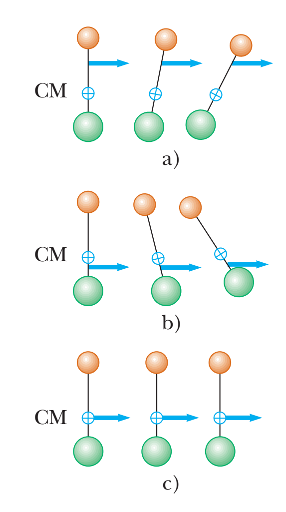


Figura 9.13 Dos partículas de distinta masa se conectan mediante una barra rígida ligera. a) El sistema gira en sentido de las manecillas del reloj cuando una fuerza se aplica arriba del centro de masa. b) El sistema gira contra las manecillas del reloj cuando una fuerza se aplica por abajo del centro de masa. c) El sistema se mueve en la dirección de la fuerza sin girar cuando una fuerza se aplica en el centro de masa.

El centro de masa del par de partículas descritas en la figura 9.14 (página 246) se ubica sobre el eje x y yace en algún lugar entre las partículas. Su coordenada x está dada por

$$x_{\text{CM}} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad \textbf{(9.28)}$$

Figura 9.14 El centro de masa de dos partículas de masa distinta sobre el eje x se ubica en x_{CM}, un punto entre las partículas, más cerca de la que tiene la mayor masa.

Por ejemplo, si $x_1 = 0$, $x_2 = d$ y $m_2 = 2m_1$, se encuentra que $x_{CM} = \frac{2}{3}d$. Es decir, el centro de masa se encuentra más cerca de la partícula más pesada. Si las dos masas son iguales, el centro de masa se encuentra a medio camino entre las partículas.

Se puede extender este concepto a un sistema de muchas partículas con masas m_i en tres dimensiones. La coordenada x del centro de masa de n partículas se define como

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_ix_i}{M} = \frac{1}{M}\sum_i m_ix_i \qquad \textbf{(9.29)}$$

donde x_i es la coordenada x de la i–ésima partícula y la masa total es $M \equiv \sum_i m_i$, donde la suma incluye las n partículas. Las coordenadas y y z del centro de masa se definen de igual modo por las ecuaciones

$$y_{CM} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_iy_i \quad \text{y} \quad z_{CM} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_iz_i \qquad \textbf{(9.30)}$$

El centro de masa se puede ubicar en tres dimensiones mediante su vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_{CM}$. Las componentes de este vector son x_{CM}, y_{CM} y z_{CM}, definidas en las ecuaciones 9.29 y 9.30. Por lo tanto,

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = x_{CM}\hat{\mathbf{i}} + y_{CM}\hat{\mathbf{j}} + z_{CM}\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{M}\sum_i m_ix_i\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{M}\sum_i m_iy_i\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{M}\sum_i m_iz_i\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{\mathbf{r}}_i \qquad \textbf{(9.31)}$$

donde $\vec{\mathbf{r}}_i$ es el vector de posición de la i–ésima partícula, definida por

$$\vec{\mathbf{r}}_i \equiv x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{\mathbf{k}}$$

Aunque ubicar el centro de masa para un objeto extendido es un poco más problemático que ubicar el centro de masa de un sistema de partículas, las ideas básicas discutidas aún se aplican. Piense en un objeto extendido como un sistema que contiene un gran número de partículas (figura 9.15). Ya que la separación de las partículas es muy pequeña, se considera que el objeto tiene una distribución de masa continua. Al dividir el objeto en elementos de masa Δm_i con coordenadas x_i, y_i, z_i, se ve que la coordenada x del centro de masa es aproximadamente

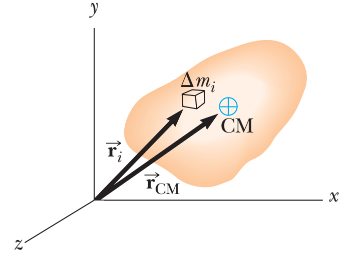


Figura 9.15 Un objeto extendido se considera como una distribución de pequeños elementos de masa Δm_i. El centro de masa se ubica en la posición vectorial $\vec{\mathbf{r}}_{CM}$, que tiene coordenadas x_{CM}, y_{CM} y z_{CM}.

$$x_{CM} \approx \frac{1}{M}\sum_i x_i\,\Delta m_i$$

con expresiones similares para y_{CM} y z_{CM}. Si se hace que el número n de elementos tienda a infinito, el tamaño de cada elemento tiende a cero y x_{CM} se conoce con precisión. En este límite, se sustituye la suma mediante una integral y Δm_i por el elemento diferencial dm:

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{1}{M}\sum_i x_i\,\Delta m_i = \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad \textbf{(9.32)}$$

Del mismo modo, para y_{CM} y z_{CM} se obtiene

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \quad \text{y} \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm \qquad \textbf{(9.33)}$$

La posición vectorial del centro de masa de un objeto extendido se expresa en la forma

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\,dm \qquad \textbf{(9.34)}$$

que es equivalente a las tres expresiones dadas por las ecuaciones 9.32 y 9.33.

El centro de masa de cualquier objeto simétrico se encuentra sobre un eje de simetría y sobre cualquier plano de simetría.[3] Por ejemplo, el centro de masa de una barra uniforme se encuentra a medio camino entre sus extremos. El centro de masa de una esfera o un cubo se encuentra en su centro geométrico.

El centro de masa de un objeto con forma irregular, como una llave de tuerca, se determina al suspender el objeto, primero de un punto y luego de otro. En la figura 9.16, una llave de tuerca cuelga del punto *A* y se dibuja una línea vertical *AB* (que se puede establecer con una plomada) cuando la llave de tuerca deja de balancearse. Luego la llave de tuerca se cuelga del punto *C*, y se dibuja una segunda línea vertical *CD*. El centro de masa está a la mitad a través del grosor de la llave de tuerca, bajo la intersección de estas dos líneas. En general, si la llave de tuerca cuelga libremente de cualquier punto, la línea vertical a través de este punto debe pasar a través del centro de masa.

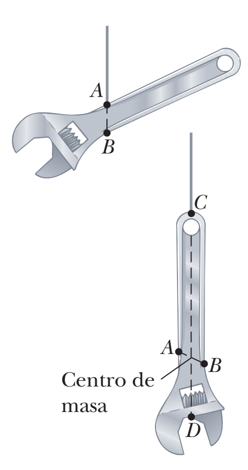


Figura 9.16 Una técnica experimental para determinar el centro de masa de una llave de tuerca. La llave de tuerca cuelga libremente, primero del punto *A* y luego del punto *C*. La intersección de las dos líneas *AB* y *C* ubica el centro de masa.

Ya que un objeto extendido es una distribución de masa continua, en cada elemento pequeño de masa actúa la fuerza gravitacional. El efecto neto de todas estas fuerzas es equivalente al efecto de una sola fuerza $M\vec{\mathbf{g}}$ que actúa a través de un punto especial, llamado **centro de gravedad**. Si $\vec{\mathbf{g}}$ es constante sobre la distribución de masa, el centro de gravedad coincide con el centro de masa. Si un objeto extendido gira sobre un eje en su centro de gravedad, se equilibra en cualquier orientación.

Pregunta rápida 9.7 Un bat de beisbol de densidad uniforme se corta en la ubicación de su centro de masa, como se muestra en la figura 9.17. ¿Cuál trozo tiene la menor masa? a) el de la derecha, b) el de la izquierda, c) ambos trozos tienen la misma masa, d) imposible de determinar.



Figura 9.17 (Pregunta rápida 9.7) Un bat de beisbol cortado en la ubicación de su centro de masa.

EJEMPLO 9.10 El centro de masa de tres partículas

Un sistema consiste de tres partículas ubicadas como se muestra en la figura 9.18. Encuentre el centro de masa del sistema.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.18 muestra las tres masas. Su intuición debe decirle que el centro de masa se ubica en alguna parte en la región entre la partícula anaranjada y el par de partículas coloreadas en azul y verde, como se muestra en la figura.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución porque se usarán las ecuaciones para el centro de masa desarrolladas en esta sección.

El problema se configuró al etiquetar las masas de las partículas como se muestra en la figura, con $m_1 = m_2 = 1.0$ kg y $m_3 = 2.0$ kg.

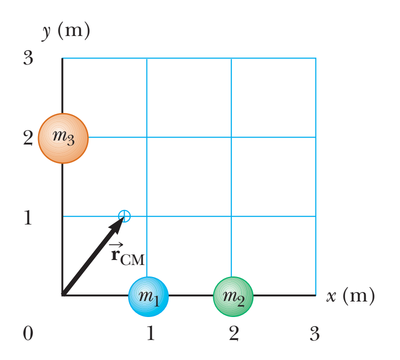


Figura 9.18 (Ejemplo 9.10) Dos partículas de 1.0 kg se ubican en el eje *x*, y una sola partícula de 2.0 kg se ubica en el eje *y* como se muestra. El vector indica la ubicación del centro de masa del sistema.

[3] Esta afirmación sólo es válida para objetos que tienen una densidad uniforme.

Sustituya para y en la ecuación 1):

$$x_{CM} = \frac{2}{ab}\int_0^a x\left(\frac{b}{a}x\right)dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2 dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$
$$= \tfrac{2}{3}a$$

Por lo tanto, el alambre se debe unir a la señal a una distancia dos tercios la longitud del borde inferior desde el extremo izquierdo.

Finalizar Esta respuesta es idéntica a la del inciso B) del ejemplo 9.11. Para la señal triangular, el aumento lineal en altura y con la posición x significa que los elementos en la señal aumentan en masa linealmente, lo que refleja el aumento lineal en densidad de masa en el ejemplo 9.11. También se podría encontrar la coordenada y del centro de masa de la señal, pero esto no es necesario para determinar dónde se debe unir el alambre. Puede intentar cortar un triángulo rectángulo de cartulina y colgarlo de una cuerda de modo que la base larga sea horizontal. ¿La cuerda necesita unirse a $\frac{2}{3}a$?

9.6 Movimiento de un sistema de partículas

Comenzará a entender el significado físico y la utilidad del concepto de centro de masa si toma la derivada con el tiempo del vector posición para el centro de masa conocido en la ecuación 9.31. De la sección 4.1 se sabe que la derivada con el tiempo de un vector de posición es por definición el vector velocidad. Si supone que M permanece constante para un sistema de partículas (esto es, ninguna partícula entra o sale del sistema) se obtiene la siguiente expresión para la **velocidad del centro de masa** del sistema:

Velocidad del centro de masa ▶

$$\vec{\mathbf{v}}_{CM} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{\mathbf{v}}_i \quad \textbf{(9.35)}$$

donde $\vec{\mathbf{v}}_i$ es la velocidad de la i-ésima partícula. Al reordenar la ecuación 9.35 proporciona

Cantidad de movimiento total de un sistema de partículas ▶

$$M\vec{\mathbf{v}}_{CM} = \sum_i m_i\vec{\mathbf{v}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_{tot} \quad \textbf{(9.36)}$$

Debido a eso, la **cantidad de movimiento lineal total del sistema es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa.** En otras palabras, la cantidad de movimiento lineal total del sistema es igual a la de una sola partícula de masa M que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_{CM}$.

La derivación de la ecuación 9.35 respecto del tiempo, se obtiene la **aceleración del centro de masa** del sistema:

Aceleración del centro de masa ▶

$$\vec{\mathbf{a}}_{CM} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{\mathbf{a}}_i \quad \textbf{(9.37)}$$

Al reordenar esta expresión y usar la segunda ley de Newton se obtiene

$$M\vec{\mathbf{a}}_{CM} = \sum_i m_i\vec{\mathbf{a}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i \quad \textbf{(9.38)}$$

donde $\vec{\mathbf{F}}_i$ es la fuerza neta sobre la partícula i.

Las fuerzas sobre cualquier partícula en el sistema pueden incluir tanto fuerzas externas (desde afuera del sistema) y fuerzas internas (desde dentro del sistema). Sin embargo, por la tercera ley de Newton, la fuerza interna que ejerce la partícula 1 sobre la partícula 2, por ejemplo, es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza interna que ejerce la partícula 2 sobre la partícula 1. En consecuencia, cuando en la ecuación 9.38 se suman todas las fuerzas internas, se cancelan en pares y se encuentra que la fuerza neta en el sistema la causan *solamente* las fuerzas externas. En tal caso se escribe la ecuación 9.38 en la forma

Segunda ley de Newton para un sistema de partículas ▶

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{ext} = M\vec{\mathbf{a}}_{CM} \quad \textbf{(9.39)}$$

Es decir, **la fuerza externa neta en un sistema de partículas es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masa.** Al comparar la ecuación 9.39 con la segunda ley de Newton para una sola partícula, se ve que el modelo de partícula que se ha usado en muchos capítulos se describe en términos del centro de masa:

El centro de masa de un sistema de partículas que tiene masa combinada M se mueve como una partícula equivalente de masa M que se movería bajo la influencia de la fuerza externa neta en el sistema.

Se integra la ecuación 9.39 en un intervalo de tiempo finito:

$$\int \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}\, dt = \int M\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}}\, dt = \int M \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}}}{dt}\, dt = M \int d\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = M\, \Delta\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}}$$

Note que esta ecuación se puede escribir como

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} \qquad \textbf{(9.40)}$$

donde $\vec{\mathbf{I}}$ es el impulso que las fuerzas externas imparten al sistema y $\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}}$ es la cantidad de movimiento del sistema. La ecuación 9.40 es la generalización del teorema impulso–cantidad de movimiento para una partícula (ecuación 9.10) a un sistema de partículas.

Por último, si la fuerza externa neta sobre un sistema es cero, se sigue de la ecuación 9.39 que

$$M\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}} = M \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}}}{dt} = 0$$

de modo que

$$M\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \text{constante} \quad \left(\text{cuando} \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = 0\right) \qquad \textbf{(9.41)}$$

Es decir, la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas se conserva si no hay fuerza neta externa que actúe sobre el sistema. Se sigue que, para un sistema aislado de partículas, tanto la cantidad de movimiento total como la velocidad del centro de masa son constantes en el tiempo. Este enunciado es una generalización de la ley de conservación de la cantidad de movimiento para un sistema de muchas partículas.

Suponga que un sistema aislado que consta de dos o más integrantes en reposo. El centro de masa de tal sistema permanece en reposo a menos que sobre él actúe una fuerza externa. Por ejemplo, considere un sistema de un nadador que está de pie sobre una balsa, con el sistema inicialmente en reposo. Cuando el nadador se clava horizontalmente desde la balsa, ésta se mueve en la dirección opuesta a la del nadador y el centro de masa del sistema permanece en reposo (si se desprecia la fricción entre la balsa y el agua). Además, la cantidad de movimiento lineal del nadador es igual en magnitud a la de la balsa, pero opuesta en dirección.

Pregunta rápida 9.8 Un crucero se mueve con rapidez constante a través del agua. Los vacacionistas en el barco están ansiosos por llegar a su siguiente destino. Deciden acelerar el crucero reuniéndose en la proa (el frente) y correr hacia la popa (la parte trasera) de la nave. **i)** Mientras corren hacia la popa, ¿la rapidez de la nave es a) mayor que antes, b) invariable, c) menor que antes, o d) imposible de determinar? **ii)** Los vacacionistas dejan de correr cuando llegan a la popa del barco. Después de que todos dejan de correr, ¿la rapidez del barco es a) mayor de la que era antes de que comenzaran a correr, b) invariable de la que era antes de que comenzaran a correr, c) menor de la que era antes de que comenzaran a correr, o d) imposible de determinar?

EJEMPLO CONCEPTUAL 9.13 **Explosión de un proyectil**

Un proyectil disparado al aire súbitamente explota en muchos fragmentos (figura 9.21).

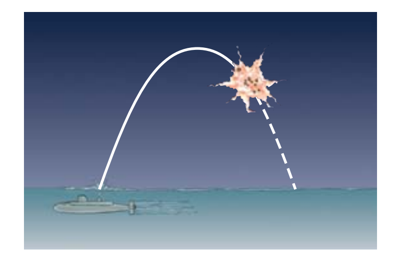


Figura 9.21 (Ejemplo conceptual 9.13) Cuando un proyectil explota en muchos fragmentos, el centro de masa del sistema conformado por todos los fragmentos sigue la misma trayectoria parabólica que el proyectil habría tomado si no hubiese explotado.

A) ¿Qué se puede decir acerca del movimiento del centro de masa del sistema conformado por todos los fragmentos después de la explosión?

SOLUCIÓN

Si desprecia la resistencia del aire, la única fuerza externa en el proyectil es la fuerza gravitacional. Por lo tanto, si el proyectil no explota, continuará moviéndose a lo largo de la trayectoria parabólica indicada por la línea discontinua en la figura 9.21. Ya que las fuerzas causadas por la explosión son internas, no afectan el movimiento del centro de masa del sistema (los fragmentos). En consecuencia, después de la explosión, el centro de masa de los fragmentos sigue la misma trayectoria parabólica que el proyectil habría seguido si no hubiese ocurrido la explosión.

B) Si el proyectil no explota, aterrizará a una distancia R desde su punto de lanzamiento. Suponga que el proyectil explota y se separa en dos piezas de igual masa. Una pieza aterriza a una distancia $2R$ desde el punto de lanzamiento. ¿Dónde aterriza la otra pieza?

SOLUCIÓN

Como se discutió en el inciso A), el centro de masa del sistema de dos piezas aterriza a una distancia R desde el punto de lanzamiento. Una de las piezas aterriza a una distancia más allá de R desde el punto de aterrizaje (o a una distancia $2R$ desde el punto de lanzamiento), a la derecha en la figura 9.21. Ya que las dos piezas tienen la misma masa, la otra pieza debe aterrizar a una distancia R a la izquierda del punto de aterrizaje en la figura 9.21, ¡lo que coloca a esta pieza justo de regreso en el punto de lanzamiento!

EJEMPLO 9.14 **El cohete que explota**

Un cohete se dispara verticalmente hacia arriba. En el instante en que llega a una altura de 1 000 m y una rapidez de 300 m/s, explota en tres fragmentos que tienen igual masa. Un fragmento se mueve hacia arriba con una rapidez de 450 m/s después de la explosión. El segundo fragmento tiene una rapidez de 240 m/s y se mueve al este justo después de la explosión. ¿Cuál es la velocidad del tercer fragmento inmediatamente después de la explosión?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Dibuje la explosión en su mente, con una pieza yendo hacia arriba y una segunda pieza moviéndose horizontalmente hacia el este. ¿Tiene usted algún sentimiento intuitivo acerca de la dirección en la que se mueve la tercera pieza?

Categorizar Este ejemplo es un problema en dos dimensiones porque tiene dos fragmentos móviles en direcciones perpendiculares después de la explosión, así como un tercer fragmento que se mueve en una dirección desconocida en el plano definido por los vectores velocidad de los otros dos fragmentos. Se supone que el intervalo de tiempo de la explosión es muy breve, así que se usa la aproximación de impulso en la que se ignora la fuerza gravitacional y la resistencia del aire. Ya que las fuerzas de la explosión son internas al sistema (el cohete), el sistema se modela como aislado y la cantidad de movimiento total $\vec{\mathbf{p}}_i$ del cohete inmediatamente antes de la explosión debe ser igual a la cantidad de movimiento total $\vec{\mathbf{p}}_f$ de los fragmentos inmediatamente después de la explosión.

Analizar Ya que los tres fragmentos tienen igual masa, la masa de cada fragmento es $M/3$, donde M es la masa total del cohete. Sea $\vec{\mathbf{v}}_f$ que representa la velocidad desconocida del tercer fragmento.

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento del sistema antes de la explosión:

$$\vec{\mathbf{p}}_i = M\vec{\mathbf{v}}_i = M(300\hat{\mathbf{j}}\text{ m/s})$$

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento del sistema después de la explosión:

$$\vec{\mathbf{p}}_f = \frac{M}{3}(240\hat{\mathbf{i}}\text{ m/s}) + \frac{M}{3}(450\hat{\mathbf{j}}\text{ m/s}) + \frac{M}{3}\vec{\mathbf{v}}_f$$

Iguale estas dos expresiones: $$\frac{M}{3}\vec{\mathbf{v}}_f + \frac{M}{3}(240\,\hat{\mathbf{i}}\ \mathrm{m/s}) + \frac{M}{3}(450\,\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s}) = M(300\,\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s})$$

Resuelva para $\vec{\mathbf{v}}_f$: $$\vec{\mathbf{v}}_f = (-240\,\hat{\mathbf{i}} + 450\,\hat{\mathbf{j}})\ \mathrm{m/s}$$

Finalizar Note que este evento es el inverso de una colisión perfectamente inelástica. Hay un objeto antes de la colisión y tres objetos después. Imagine correr hacia atrás una película del evento: los tres objetos se juntarían y se convertirían en un solo objeto. En una colisión perfectamente inelástica, la energía cinética del sistema disminuye. Si calcula la energía cinética antes y después del evento en este ejemplo, encontrará que la energía cinética del sistema aumenta. (¡Inténtelo!) Este aumento en energía cinética viene de la energía potencial almacenada en cualquier combustible que explote para causar el rompimiento del cohete.

9.7 Sistemas deformables

Hasta el momento, en esta exposición de mecánica, se analizó el movimiento de partículas o sistemas no deformables que se modelan como partículas. La discusión en la sección 9.6 se puede aplicar a un análisis del movimiento de los sistemas deformables. Por ejemplo, suponga que está de pie sobre una patineta y se empuja de una pared, con lo que se pone en movimiento alejándose de la pared. ¿Cómo describiría este evento?

La fuerza a causa de la pared en sus manos se mueve hasta el final sin desplazamiento; la fuerza siempre se localiza en la interfaz entre la pared y sus manos. Por lo tanto, la fuerza no trabaja en el sistema, que son usted y su patineta. Sin embargo, empujarse de la pared en efecto da por resultado un cambio en la energía cinética del sistema. Si intenta usar el teorema trabajo–energía cinética, $W = \Delta K$, para describir este evento, note que el lado izquierdo de la ecuación es cero, pero el lado derecho es distinto de cero. El teorema trabajo–energía cinética no es válido para este evento y con frecuencia no es válido para sistemas que son deformables. Su cuerpo se deformó durante este evento: sus brazos se doblaron antes del evento y se estiraron mientras se empujaba de la pared.

Para analizar el movimiento de los sistemas deformables, se recurre a la ecuación 8.2, la ecuación de conservación de la energía, y a la ecuación 9.40, el teorema impulso–cantidad de movimiento para un sistema. Para el ejemplo de usted empujándose de la pared sobre su patineta, la ecuación 8.2 produce

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \sum T$$

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

donde ΔK es el cambio en energía cinética debida al aumento de rapidez del sistema y ΔU es la disminución en energía potencial almacenada en el cuerpo resultante de las comidas previas. Esta ecuación dice que el sistema transformó energía potencial en energía cinética mediante el empleo de fuerza muscular necesaria para empujarse de la pared.

Al aplicar la ecuación 9.40 a esta situación se obtiene

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}}$$

$$\int \vec{\mathbf{F}}_{\text{pared}}\, dt = m\,\Delta\vec{\mathbf{v}}$$

donde $\vec{\mathbf{F}}_{\text{pared}}$ es la fuerza que ejerce la pared sobre sus manos, m es la masa de usted y la patineta, y $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ es el cambio en la velocidad del sistema durante el evento. Para evaluar el lado izquierdo de esta ecuación, se necesitaría conocer cómo varía en el tiempo la fuerza a causa de la pared. En general, este proceso puede ser complicado. Sin embargo, en el caso de fuerzas constantes, o fuerzas bien comportadas, se puede evaluar la integral del lado izquierdo de la ecuación.